Master M1 - Mido 2015-2016

Examen de Rattrapage: Gestion de Portefeuille [1]: Durée 1h30

[5 points] **Exercice 1.**

1) a et c

2) c

3) c

4) b et c

5) a b c et d

6) a

7) a et d

8) a et b

9) a et c

10) a)

Exercice 1.

1) dans le premier cas l'investissement dans l'actif i est $\lambda x_0 \frac{1}{\lambda}\pi^i$ dans le deuxième cas l'investissement dans l'actif i est $x_0\pi^i$ qui vaut la même chose. CQFD

2) On définit $x_0 = \tilde{\pi}^0 y_0 + \sum_{i=1}^{i=d} \tilde{\pi}^i y_0$ et $\pi^i = \frac{\tilde{\pi}^i y_0}{x_0}$ et on appelle Π le vecteurs de composante les π_i. (x_0, Π) est la solution cherchée.

3) richesse nulle

4) La valeur à l'instant T du portefeuille (x_0, Π)

5) $R_\Pi = \frac{1}{x_0}\left[x_0\pi_0(1+r_0) - x_0 + \sum_{i=1}^{i=d} x_0\pi^i[\frac{S_T^i}{S_0^i} - 1]\right] = \Pi' R$

6) Même chose que 5) car le résultat ne dépend pas de la valeur de $\sum_{i=0}^{i=d} \pi^i$

[1] Pierre Brugière Université Paris 9 Dauphine

7) $Var(R_\Pi) = Var(\Pi' R) = cov(\sum_{i=0}^{i=d} \pi^i r^i, \sum_{j=0}^{j=d} \pi^j r^j)$
$\sum_{i=0}^{i=d}\sum_{j=0}^{j=d} \pi^i \pi^j cov(r^i, r^j)$. CQFD

8) Si Σ n'est pas inversible alors $\exists u \in \mathbf{R}^d \neq 0$ tel que $\Sigma u = 0$
$\Sigma u = 0 \Rightarrow u'\Sigma u = 0$ deux cas alors sont possible
a) si $\sum_{i=1}^{i=d} u_i = 0$ alors pour tout $x_0 \neq 0$ (x_0, u) serait un portefeuille autofinancant sans risque
b) si $\sum_{i=1}^{i=d} u_i \neq 0$ alors pour tout $x_0 \neq 0$ $(x_0, \frac{u}{\sum_{i=i}^{i=d} u_i})$ serait un portefeuille d'investissement sans risque.

9) car
a)si il existait un portefeuille autofinancant de rendement constant non nul cela voudrait dire qu'il y a des arbitrages possibles
b)si il existait un portefeuille autofinancant de rendement constant nul cela signifierait qu'un des actifs risqués peut être repliqué par les autres et il n'y aurait donc pas de sens de l'introduire dans le modèle.
c)si il existait un portefeuille autofinancant de rendement constant alors on pourrait éliminer un actif risqué du modèle et à la place dire qu'il existe un actif sans risque qui aurait pour rendement ce rendement constant.

10) La première composante vaut 1 et les autres 0.

11) Si on considère le portefeuille (x_0, Π) défini par $\Pi = \lambda\Pi_0 + (1-\lambda)\Pi_M$
a) la somme des coefficients vaut $\lambda + 1 - \lambda = 1$ CQFD
b) $R_{\lambda\Pi_0+(1-\lambda)\Pi_M} = R'(\lambda\Pi_0 + (1-\lambda)\Pi_M) = \lambda R'\Pi_0 + (1-\lambda)R'\Pi_M$
$= \lambda r_0 + (1-\lambda)R_M$ donc
$E[R_{\lambda\Pi_0+(1-\lambda)\Pi_M}] = E[\lambda r_0 + (1-\lambda)R_M] = r_0 + (1-\lambda)E[R_M]$
c) $Var[R_{\lambda\Pi_0+(1-\lambda\Pi)}] = Var[\lambda r_0 + (1-\lambda)R_M] = Var[(1-\lambda)R_M] = (1-\lambda)^2 Var[R_M]$
d) si $\lambda \leq 1$ l'écart type du portefeuillle est $= (1-\lambda)\sigma_M$ et
$(\lambda r_0 + (1-\lambda)E[R_M], (1-\lambda)\sigma_M)$ est sur la droite passant par les points
$(0, r_0)$ et $(\sigma_M, E[R_M])$ CQFD
e) si $0 \leq \lambda \leq 1$ à l'intérieur du segment.
si $\lambda \leq 0$ sur la droite (Capital Market Line) formée par le segment mais à l'extérieur
si $\lambda > 1$ sur un cone de sommet $(r_0, 0)$ dont la Capital Market Line fait partie.

12) Comme les deux portefeuilles sont sur la Capital Market Line ils s'écrivent sous la forme:
$\Pi_1 = \lambda_1\Pi_0 + (1-\lambda_1)\Pi_M$ avec $\lambda_1 \leq 1$ et
$\Pi_2 = \lambda_2\Pi_0 + (1-\lambda_2)\Pi_M$ avec $\lambda_2 \leq 1$

donc $cov(R_{\Pi_1}, R_{\Pi_2}) = cov((1-\lambda_1)R_M, (1-\lambda_2)R_M) = (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)var(R_M)$

13) a) et b) comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$ Π_1 et Π_2 sont des vecteurs indépendants de $\mathbf{R}^d$. Ils engendrent donc le même espace vectoriel que Π_0 et Π_M qui les génèrent et en particulier ils engendrent ces deux vecteurs CQFD.

14)

a) Voir cours

b) La Security Market line

15) Voir cours

16) On part du point $\begin{pmatrix} \sigma_P \\ m_P \end{pmatrix}$ on se déplace parallèlement à l'axe des σ jusqu'à intersection avec la Capital Market Line et on redescend parallèlement à l'axe des m. Le point d'intersection avec l'axe des σ aura pour coordonnées $\beta_{P,M}\sigma_M$.